

开放性问题

一、选择题

1. 1. (2018·浙江舟山·3分) 某届世界杯的小组比赛规则：四个球队进行单循环比赛（每两队赛一场），胜一场得3分，平一场得1分，负一场得0分，某小组比赛结束后，甲、乙、丙、丁四队分别获得第一，二，三，四名，各队的总得分恰好是四个连续奇数，则与乙打平的球队是（ ）

- A. 甲
- B. 甲与丁
- C. 丙
- D. 丙与丁

【考点】推理与论证

【分析】需要推理出甲、乙、丙、丁四人的分数：每个人都要比赛3场，要是3场全胜得最高9分，根据已知“甲、乙、丙、丁四队分别获得第一，二，三，四名”和“各队的总得分恰好是四个连续奇数”，可推理出四人的分数各是多少，再根据胜、平、负一场的分数去讨论打平的场数。

【解答】解：小组赛一共需要比赛 $\frac{3 \times 4}{2} = 6$ 场，

由分析可知甲是最高分，且可能是9或7分，

当甲是9分时，乙、丙、丁分别是7分、5分、3分，

因为比赛一场最高得分3分，

所以4个队的总分最多是 $6 \times 3 = 18$ 分，

而 $9 + 7 + 5 + 3 > 18$ ，故不符合；

当甲是7分时，乙、丙、丁分别是5分、3分、1分， $7 + 5 + 3 + 1 < 18$ ，符合题意，

因为每人要参加3场比赛，

所以甲是2胜1平，乙是1胜2平，丁是1平2负，

则甲胜丁1次，胜丙1次，与乙打平1次，

因为丙是3分，所以丙只能是1胜2负，

乙另外一次打平是与丁，

则与乙打平的是甲、丁

故答案是B。

【点评】要注重分类讨论.

二. 解答题

(要求同上一)

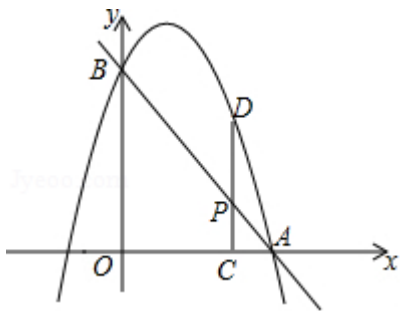
1. (2018·湖南省衡阳·10分) 如图, 已知直线 $y = -2x + 4$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 A、B, 抛物线过 A、B 两点, 点 P 是线段 AB 上一动点, 过点 P 作 $PC \perp x$ 轴于点 C, 交抛物线于点 D.

(1) 若抛物线的解析式为 $y = -2x^2 + 2x + 4$, 设其顶点为 M, 其对称轴交 AB 于点 N.

①求点 M、N 的坐标;

②是否存在点 P, 使四边形 MNP D 为菱形? 并说明理由;

(2) 当点 P 的横坐标为 1 时, 是否存在这样的抛物线, 使得以 B、P、D 为顶点的三角形与 $\triangle AOB$ 相似? 若存在, 求出满足条件的抛物线的解析式; 若不存在, 请说明理由.



【解答】解: (1) ①如图 1,

$$\because y = -2x^2 + 2x + 4 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2},$$

$\therefore$ 顶点为 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$,

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = -2 \times \frac{1}{2} + 4 = 3$, 则点 N 坐标为 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$;

②不存在.

理由如下:

$$MN = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2},$$

设 P 点坐标为 $(m, -2m + 4)$, 则 D $(m, -2m^2 + 2m + 4)$,

$$\therefore PD = -2m^2 + 2m + 4 - (-2m + 4) = -2m^2 + 4m,$$

$\because PD \parallel MN$,

当 $PD = MN$ 时, 四边形 MNP D 为平行四边形, 即 $-2m^2 + 4m = \frac{3}{2}$, 解得 $m_1 = \frac{1}{2}$ (舍去), $m_2 = \frac{3}{2}$, 此时 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$,

$$\because PN = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5},$$

$\therefore PN \neq MN$,

$\therefore$ 平行四边形 MNP D 不为菱形,

$\therefore$ 不存在点 P, 使四边形 MNP D 为菱形;

(2) 存在.

如图 2, $OB=4$, $OA=2$, 则 $AB=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$,

当 $x=1$ 时, $y=-2x+4=2$, 则 $P(1, 2)$,

$$\therefore PB=\sqrt{1^2+(2-4)^2}=\sqrt{5},$$

设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+4$,

把 $A(2, 0)$ 代入得 $4a+2b+4=0$, 解得 $b=-2a-2$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=ax^2-2(a+1)x+4$,

当 $x=1$ 时, $y=ax^2-2(a+1)x+4=a-2a-2+4=2-a$, 则 $D(1, 2-a)$,

$$\therefore PD=2-a-2=-a,$$

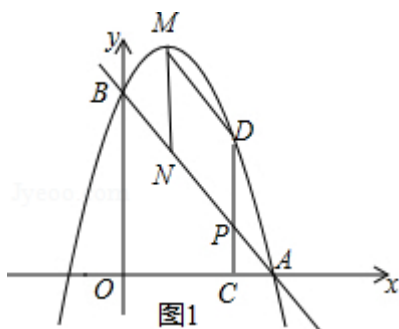
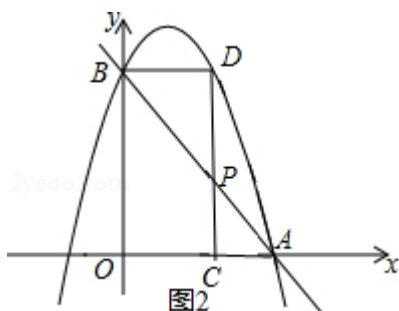
$\therefore DC \parallel OB$,

$\therefore \angle DPB = \angle OBA$,

$\therefore$ 当 $\frac{PD}{BO} = \frac{PB}{BA}$ 时, $\triangle PDB \sim \triangle BOA$, 即 $\frac{-a}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, 解得 $a=-2$, 此时抛物线解析式为 $y=-2x^2+2x+4$;

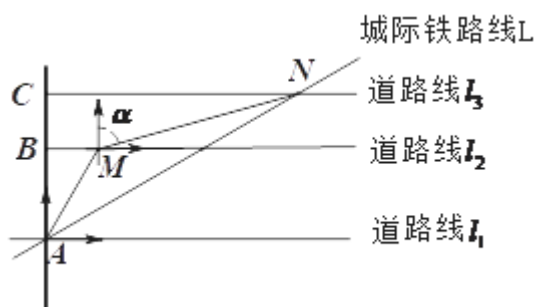
当 $\frac{PD}{BA} = \frac{PB}{BO}$ 时, $\triangle PDB \sim \triangle BAO$, 即 $\frac{-a}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$, 解得 $a=-\frac{5}{2}$, 此时抛物线解析式为 $y=-\frac{5}{2}x^2+3x+4$;

综上所述, 满足条件的抛物线的解析式为 $y=-2x^2+2x+4$ 或 $y=-\frac{5}{2}x^2+3x+4$.



2. (2018•株洲市) 下图为某区域部分交通线路图, 其中直线 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$, 直线与直线 l_1, l_2, l_3 都垂直, 垂足分别为点 A、点 B 和点 C, (高速路右侧边缘), 上的点 M 位于点 A 的北偏东 30° 方向上, 且 $BM=\sqrt{3}$ 千米, 上的点 N 位于点 M 的北偏东方向上, 且 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}$, $MN=2\sqrt{13}$ 千米, 点 A 和点 N 是城际线 L 上的两个相邻的站

点.



(1) 求 l_2 和 l_3 之间的距离

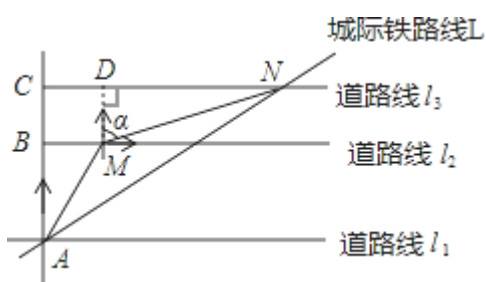
(2) 若城际火车平均时速为 150 千米/小时, 求市民小强乘坐城际火车从站点 A 到站点 N 需要多少小时?
(结果用分数表示)

【答案】(1) 2; (2) $\frac{1}{15}$ 小时.

【解析】分析: (1) 直接利用锐角三角函数关系得出 DM 的长即可得出答案;

(2) 利用 $\tan 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 得出 AB 的长, 进而利用勾股定理得出 DN 的长, 进而得出 AN 的长, 即可得出答案.

详解: (1) 过点 M 作 $MD \perp NC$ 于点 D,



$$\because \cos \alpha = \frac{\sqrt{13}}{13}, \quad MN = 2\sqrt{13} \text{ 千米},$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{DM}{MN} = \frac{DM}{2\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13},$$

解得: $DM = 2$ (km),

答: l_2 和 l_3 之间的距离为 2km;

(2) $\because$ 点 M 位于点 A 的北偏东 30° 方向上, 且 $BM = \sqrt{3}$ 千米,

$$\therefore \tan 30^\circ = \frac{BM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得: $AB = 3$ (km),

可得: $AC = 3 + 2 = 5$ (km),

$$\because MN = 2\sqrt{13} \text{ km}, \quad DM = 2 \text{ km},$$

$$\therefore DN = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 2^2} = 4\sqrt{3} \text{ (km)},$$

则 $NC=DN+BM=5\sqrt{3}$ (km),

$$\therefore AN=\sqrt{AC^2+CN^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+5^2}=10 \text{ (km)},$$

$\therefore$ 城际火车平均时速为 150 千米/小时,

$$\therefore \text{市民小强乘坐城际火车从站点 A 到站点 N 需要 } \frac{10}{150} = \frac{1}{15} \text{ 小时}.$$

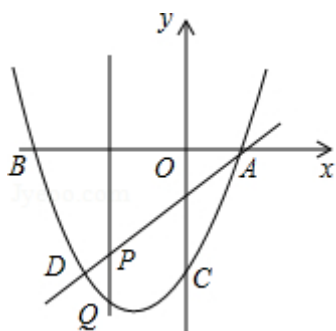
点睛: 此题主要考查了解直角三角形的应用, 正确得出 AN 的长是解题关键.

3. (2018·四川自贡·14 分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 过 A(1, 0)、B(-3, 0), 直线 AD 交抛物线于点 D, 点 D 的横坐标为 -2, 点 P(m, n) 是线段 AD 上的动点.

(1) 求直线 AD 及抛物线的解析式;

(2) 过点 P 的直线垂直于 x 轴, 交抛物线于点 Q, 求线段 PQ 的长度 l 与 m 的关系式, m 为何值时, PQ 最长?

(3) 在平面内是否存在整点(横、纵坐标都为整数) R, 使得 P、Q、D、R 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 直接写出点 R 的坐标; 若不存在, 说明理由.



【分析】(1) 根据待定系数法, 可得抛物线的解析式; 根据自变量与函数值的对应关系, 可得 D 点坐标, 再根据待定系数法, 可得直线的解析式;

(2) 根据平行于 y 轴直线上两点间的距离是较大的纵坐标减较小的纵坐标, 可得二次函数, 根据二次函数的性质, 可得答案;

(3) 根据 PQ 的长是正整数, 可得 PQ, 根据平行四边形的性质, 对边平行且相等, 可得 DR 的长, 根据点的坐标表示方法, 可得答案.

【解答】解: (1) 把 (1, 0), (-3, 0) 代入函数解析式, 得

$$\begin{cases} a+b-3=0 \\ 9a-3b-3=0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases},$$

抛物线的解析式为 $y=x^2+2x-3$;

当 $x=-2$ 时, $y=(-2)^2+2\times(-2)-3$, 解得 $y=-3$,

即 D(-2, -3).

设 AD 的解析式为 $y=kx+b$ ，将 A (1, 0), D (-2, -3) 代入，得

$$\begin{cases} k+b=0 \\ -2k+b=-3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases},$$

直线 AD 的解析式为 $y=x-1$;

(2) 设 P 点坐标为 (m, m-1), Q (m, m^2+2m-3),

$$l = (m-1) - (m^2+2m-3)$$

化简，得

$$l = -m^2 - m + 2$$

配方，得

$$l = -\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

$$\text{当 } m = -\frac{1}{2} \text{ 时, } l_{\text{最大}} = \frac{9}{4};$$

(3) $DR \parallel PQ$ 且 $DR=PQ$ 时, PQDR 是平行四边形,

$$\text{由 (2) 得 } 0 < PQ \leq \frac{9}{2},$$

又 PQ 是正整数,

$$\therefore PQ=1, \text{ 或 } PQ=2.$$

当 $PQ=1$ 时, $DR=1$, $-3+1=-2$, 即 R (-2, -2),

$$-3-1=-4, \text{ 即 } R (-2, -4);$$

当 $PQ=2$ 时, $DR=2$, $-3+2=-1$, 即 R (-2, -1),

$$-3-2=-5, \text{ 即 } R (-2, -5),$$

综上所述: R 点的坐标为 (-2, -2), (-2, -4), (-2, -1), (-2, -5), 使得 P、Q、D、R 为顶点的四边形是平行四边形.

【点评】本题考查了二次函数综合题, 解 (1) 的关键是待定系数法; 解 (2) 的关键是利用二次函数的性质; 解 (3) 的关键是利用 $DR=PQ$ 且是正整数得出 DR 的长.

4 (2018·浙江舟山·8 分) 某厂为了检验甲、乙两车间生产的同一款新产品的合格情况 (尺寸范围为 176mm-185mm 的产品为合格), 随机各抽取了 20 个样品进行测试, 过程如下: 收集数据 (单位: mm):

甲车间: 168, 175, 180, 185, 172, 189, 185, 182, 185, 174, 192, 180, 185, 178, 173, 185, 169, 187, 176, 180.

乙车间: 186, 180, 189, 183, 176, 173, 178, 167, 180, 175, 178, 182, 180, 179, 185, 180, 184, 182, 180, 183.

整理数据:

组别 频数	165.5~170.5	170.5~175.5	175.5~180.5	180.5~185.5	185.5~190.5	190.5~195.5
甲车间	2	4	5	6	2	1
乙车间	1	2	a	b	2	0

分析数据：

车间	平均数	众数	中位数	方差
甲车间	180	185	180	43.1
乙车间	180	180	180	22.6

应用数据：

- (1) 计算甲车间样品的合格率。
- (2) 估计乙车间生产的 1000 个该款新产品中合格产品有多少个？
- (3) 结合上述数据信息，请判断个车间生产的新产品更好，并说明理由，

【考点】数据分析

【解析】【分析】(1) 由题意可知，合格的产品的条件为尺寸范围为 176mm-185mm 的产品，所以甲车间合格的产品数是 (5+6)，再除总个数即可；

(2) 需要先求出乙车间的产品的合格率；而合格产品数 ($a+b$) 的值除了可以样品数据中里数出来，也可以由 $20-(1+2+2)$ 得到；

(3) 分析数据中的表格提供了甲、乙车间的平均数、众数、中位数和方差数据，根据它们的特点结合数据的大小进行比较及评价即可

【解答】(1) 甲车间样品的合格率为 $\frac{5+6}{20} \times 100\% = 55\%$

(2) $\because$ 乙车间样品的合格产品数为 $20-(1+2+2)=15$ (个)，

$\therefore$ 乙车间样品的合格率为 $\frac{15}{20} \times 100\% = 75\%$ 。

$\therefore$ 乙车间的合格产品数为 $1000 \times 75\% = 750$ (个)。

(3) ①从样品合格率看，乙车间合格率比甲车间高，所以乙车间生产的新产品更好。②从样品的方差看，甲、乙平均数相等，且均在合格范围内，而乙的方差小于甲的方差，说明乙比甲稳定，所以乙车间生产的新产品更好。

【点评】本题考查数据分析及应用数据的能力

5. (2018 年四川省内江市) 对于三个数 a, b, c ，用 $M\{a, b, c\}$ 表示这三个数的中位数，用 $\max\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最大数，例如： $M\{-2, -1, 0\} = -1$ ， $\max\{-2, -1, 0\} = 0$ ， $\max\{-2, -1, a\} = \begin{cases} a(a \geq -1) \\ -1(a < -1) \end{cases}$

解决问题：

(1) 填空： $M\{\sin 45^\circ, \cos 60^\circ, \tan 60^\circ\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，如果 $\max\{3, 5-3x, 2x-6\} = 3$ ，则 x 的取值范围为

$$\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{9}{2};$$

(2) 如果 $2 \cdot M\{2, x+2, x+4\} = \max\{2, x+2, x+4\}$, 求 x 的值;

(3) 如果 $M\{9, x^2, 3x-2\} = \max\{9, x^2, 3x-2\}$, 求 x 的值.

【考点】AD: 一元二次方程的应用; 8A: 一元一次方程的应用; CE: 一元一次不等式组的应用; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】(1) 根据定义写出 $\sin 45^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\tan 60^\circ$ 的值, 确定其中位数; 根据 $\max\{a, b, c\}$ 表示这三个数中最大数, 对于 $\max\{3, 5-3x, 2x-6\}=3$, 可得不等式组: 则 $\begin{cases} 3 \geq 5-3x \\ 3 \geq 2x-6 \end{cases}$, 可得结论;

(2) 根据新定义和已知分情况讨论: ①2 最大时, $x+4 \leq 2$ 时, ②2 是中间的数时, $x+2 \leq 2 \leq x+4$, ③2 最小时, $x+2 \geq 2$, 分别解出即可;

(3) 不妨设 $y_1=9$, $y_2=x^2$, $y_3=3x-2$, 画出图象, 根据 $M\{9, x^2, 3x-2\} = \max\{9, x^2, 3x-2\}$, 可知: 三个函数的中间的值与最大值相等, 即有两个函数相交时对应的 x 的值符合条件, 结合图象可得结论.

【解答】解: (1) $\because \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$,

$$\therefore M\{\sin 45^\circ, \cos 60^\circ, \tan 60^\circ\} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \max\{3, 5-3x, 2x-6\}=3,$$

$$\text{则} \begin{cases} 3 \geq 5-3x \\ 3 \geq 2x-6 \end{cases},$$

$$\therefore x \text{ 的取值范围为: } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{9}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{9}{2};$$

$$(2) 2 \cdot M\{2, x+2, x+4\} = \max\{2, x+2, x+4\},$$

分三种情况: ①当 $x+4 \leq 2$ 时, 即 $x \leq -2$,

$$\text{原等式变为: } 2(x+4) = 2, x = -3,$$

$$\text{②} x+2 \leq 2 \leq x+4 \text{ 时, 即 } -2 \leq x \leq 0,$$

$$\text{原等式变为: } 2 \times 2 = x+4, x = 0,$$

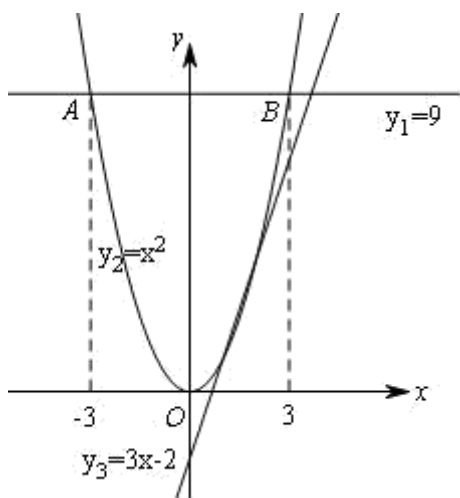
$$\text{③当 } x+2 \geq 2 \text{ 时, 即 } x \geq 0,$$

$$\text{原等式变为: } 2(x+2) = x+4, x = 0,$$

综上所述, x 的值为 -3 或 0 ;

(3) 不妨设 $y_1=9$, $y_2=x^2$, $y_3=3x-2$, 画出图象, 如图所示:

结合图象, 不难得出, 在图象中的交点 A、B 点时, 满足条件且 $M\{9, x^2, 3x-2\} = \max\{9, x^2, 3x-2\} = y_A = y_B$, 此时 $x^2=9$, 解得 $x=3$ 或 -3 .



【点评】 本题考查了方程和不等式的应用及新定义问题，理解新定义，并能结合图象，可以很轻松将抽象题或难题破解，由此看出，图象在函数相关问题的作用是何等重要.